Aspetti elementari del metodo della Dispersione e del Crivello Largo

Giovanni Coppola

Università di Salerno

Il matematico russo Yuri Vladimirovic Linnik (1915-1972) si occupò di Teoria dei Numeri, Teoria della Probabilità, Statistica Matematica (e non solo...).

Daremo i seguenti argomenti, utilizzati nello studio della distribuzione di funzioni aritmetiche in quasi tutti gli intervalli corti, che nascono dal lavoro di Yu. V. Linnik:

- $\star$ Metodo della Dispersione
- $\star$ Crivello Largo
- $\star$ Altro (identità di Linnik, ...)

Diamo, per es., un problema generale, che ha trattamento non banale con la Dispersione.

Sia $r(n)$ il n.di rappresentazioni di n come

$$n = a + D'b$$

con $a, b \in \mathbf{Z}$ in una successione fissata e D' intero dell' intervallo $[D_1, D_2]$; $r(n)$ ha valore atteso $A(n, D')$ ed $U(m)$ è il n.degli $a = m$ (ripetizioni). Linnik considerò la Dispersione:

$$\sum_{D'} \left(\sum_b U(n - D'b) - A(n, D') \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{D_1 \leq D \leq D_2} \left(\sum_b U(n - Db) - A(n, D) \right)^2$$

(Prima applicazione non banale, Linnik 1960, per $n = p + x^2 + y^2$, p primo, x, y interi)

INTEGRALE DI SELBERG ("discreto") di f:

$$J_f(N,h) \stackrel{def}{=} \sum_{N<x\le 2N} \left| \sum_{x<n\le x+h} f(n) - M_f(x,h) \right|^2$$

dove $M_f(x,h)$ è il VALORE MEDIO (ATTESO) della somma DI f nell' intervallo corto, $\sum_n f(n)$. Per esempio, Selberg introdusse (nel 1943 !)

$$J(N,h) \stackrel{def}{=} \int_N^{2N} \left| \sum_{x<n\le x+h} \Lambda(n) - h \right|^2 dx$$

chiamato (in letteratura) l' INTEGRALE DI SELBERG; qui Λ = funzione di von Mangoldt. Da $J(N,h) = o(Nh^2)$ segue T.N.P. (teorema dei numeri primi) in QUASI TUTTI I.C.:

$$\sum_{x<n\le x+h} \Lambda(n) \sim h \quad \text{Q.T. } x \in]N,2N] \cap \mathbf{Z}$$

qui "quasi tutti" (Q.T.) gli $x \in [N,2N] \cap \mathbf{Z}$ sta per $\forall x \in [N,2N] \cap \mathbf{Z}$ tranne $o(N)$ "eccezioni". Ed $[x, x+h]$ é un I.C., "intervallo corto ", se $h = h(N) \to \infty$, con $h = o(N)$ per $N \to \infty$.

Anzichè l' integrale, per RAGIONI TECNICHE, il nostro è DISCRETO. Come prima, per le f "essenzialmente limitate",

$$J_f(N,h) \ll N^{1-\delta}h^2 \Rightarrow \sum_{x<n\le x+h} f(n) \sim M_f(x,h)$$

Q.T. $x \in [N,2N] \cap \mathbf{Z}$; qui $\delta > 0$ piccolo ed f :

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ |f(n)| \ll_\varepsilon n^\varepsilon$$

F.A. (funzione aritmetica) ESSENZIALMENTE LIMITATA (Ad es., $f = d$ la funzione divisori, $d(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d|n} 1$.) Abbrevieremo $f <<< 1$.

La $\ll$ di Vinogradov equivale a O di Landau.

La "Vinogradov modificata", $<<<$, maggiora trascurando potenze arbitrariamente piccole.

In Kaczorowski-Perelli, C-Laporta (anni '90) l' INTEGRALE DI SIMMETRIA della f :

$$I_f(N,h) \stackrel{def}{=} \sum_{N<x\le 2N} \left| \sum_{|n-x|\le h} f(n)\mathrm{sgn}(n-x) \right|^2$$

(Un'altra MEDIA QUADRATICA DISCRETA)

Il segno ($\mathrm{sgn}(0) \stackrel{def}{=} 0$, $\mathrm{sgn}(r) \stackrel{def}{=} |r|/r$) "annulla il valore medio", che infatti é zero. Pure I_f, oltre a J_f, si tratta facilmente con, diciamo, la DISPERSIONE ELEMENTARE:

$$(*) \quad J_f(N,h) = \sum_a S(a)C_f(a) - M_f^2(h)N + \text{trasc.}$$

$$(**) \qquad I_f(N,h) = \sum_a W(a)C_f(a) + \text{trasc.}$$

cioé scambiamo le somme dopo aver espanso il quadrato (filosofia di Montgomery...); con $S, W \ll h$ lineari, supp.$\subset [-2h, 2h]$, S di Cesaro, W ha media nulla; e CORRELAZIONE di f

$$C_f(a) \stackrel{def}{=} \sum_{N<n\le 2N} f(n)f(n-a).$$

Pure detta SHIFTED CONVOLUTION SUM. Per $f(n) = d_3(n)$ (n.di rappr. $n = abc$) la stima é il Problema di Linnik (uno dei tanti...).

In generale, non esistono, $\forall a \neq 0$, asintotiche delle correlazioni, tranne alcune f (soprattutto $f = d$, $f =$Hecke e.v., square-free e $k-$free).

Tipicamente, formule per le $C_f(a)$ aprendo

$$f(n) = \sum_{q|n, q \ll N^\lambda} g(q),$$

$$C_f(a) = \sum_{q \ll N^\lambda} \frac{g(q)}{q} \sum_{\substack{N<n\le 2N \\ n\equiv a(q)}} f(n) \tag{1}$$

tramite LIVELLO λ nelle P.A.(progr.aritm.)

$$\sum_{q \ll N^\lambda} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{n\equiv a(q)} f(n) - \frac{1}{\varphi(a)} \sum_n f(n) \right| \ll N^{1-\delta}$$

Qui livello $\lambda = 1/2$ P.A. (Bombieri-Vinogradov, $q \ll \sqrt{N}/L^B$ dà $\ll N/L^A$) viene dalla seguente disuguaglianza, detta di CRIVELLO LARGO.

Se α_r sono $\Delta-$WELL-SPACED (ben spaziati), $\|\alpha_r - \alpha_t\| \geq \Delta$, $\forall r \neq t$, $r,t \leq R$:

$$\sum_{r\leq R}\left|\sum_{n\leq N} a_n e(n\alpha_r)\right|^2 \ll \left(N+\frac{1}{\Delta}\right)\sum_{n\leq N}|a_n|^2$$

dove $\alpha_r \in [0,1]$, $\|\alpha\|$ è la distanza di α dagli interi, $e(\beta) \stackrel{def}{=} e^{2\pi i\beta}$. In particolare, $\alpha_r = j/q$ frazioni di FAREY (cioè j,q coprimi) con $q \leq Q$,

$$\sum_{q\leq Q}\ \sum_{j\leq q}{}^{*}\left|\sum_{n\leq N} a_n e_q(jn)\right|^2 \ll \left(N+Q^2\right)\sum_{n\leq N}|a_n|^2$$

(Per le P.A., $Q = N^\lambda \Rightarrow \lambda < 1/2$ da $Q^2 \ll N$.) Quest' ultima si può applicare direttamente per le C_f (v.sopra). Seguiamo un APPROCCIO ELEMENTARE AL CRIVELLO LARGO (otteniamo lo stesso livello per le correlazioni fornito dal CL, senza usarlo), introducendo le DFT nelle correlazioni (1) per le $(*)$ e $(**)$. Qui DFT, trasformate di Fourier discrete, di S,W sono $\widehat{S},\widehat{W}$ somme esponenz.di coeff.S,W:

$$\widehat{S}(\beta) \stackrel{def}{=} \sum_a S(a)e(a\beta), \quad \widehat{W}(\beta) \stackrel{def}{=} \sum_a W(a)e(a\beta).$$

Dalla ORTOGONALITA' DEI CARATTERI ADDITIVI $e_q(m) = e^{2\pi i m/q}$ e dalla (1),

$$C_f(a) = \sum_{q \ll N^\lambda} \frac{g(q)}{q} \sum_{j (\text{mod } q)} e_q(ja) \sum_n f(n) e_q(-jn)$$

quindi la $(*)$ e la $(**)$ diventano :

$$J_f \sim \sum_{q \ll N^\lambda} \frac{g(q)}{q} \sum_{j (\text{mod } q)}{}' \widehat{S}(j/q) \sum_n f(n) e_q(-jn)$$

$$I_f \sim \sum_{q \ll N^\lambda} \frac{g(q)}{q} \sum_{j (\text{mod } q)}{}' \widehat{W}(j/q) \sum_n f(n) e_q(-jn)$$

con $\sum'$ sui $j \not\equiv 0(\text{mod } q)$, dove $\sim$ trascura resti "buoni". Elementarmente (solo calcoli), da DFT $\widehat{S}, \widehat{W} \geq 0$ abbiamo livello $\lambda < (1+\theta)/2$, per J_f, I_f, con $\theta \stackrel{def}{=} (\log h)/(\log N)$ AMPIEZZA di $[x, x+h]$. Notare $\lambda < 1/2$ P.A.!

Per le $f(n) = d(n)$ [C-Salerno, A.A.2004] ed $f(n) = \sum_{d|n} d^{-s}$ [C, Integers 2004] Criv.Largo. Livello $\lambda < (1+\theta)/2$ in [C, J.Comb.N.T.2010] e per le "divisori localizzati", (A, B fissati)

$$f(n) = \sum_{d|n, A<d\le B} 1,$$

in [C, Int.J.Pure Appl.Math.2010].

Le funzioni "multidivisor" di Piltz (vista d_3)

$$d_k(n) \stackrel{def}{=} \sum_{d_1 \cdots d_k = n} 1, \quad d'_k(n) \stackrel{def}{=} \sum_{\substack{d_1 \cdots d_k = n \\ d_1, \dots, d_k > 1}} 1$$

IDENTITÀ DI LINNIK

$$\Lambda'(n) = -\sum_k \frac{(-1)^k}{k} d'_k(n)$$

(dove $\Lambda'(n) \stackrel{def}{=} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \approx \mathbf{1}_{\mathbf{P}}(n)$, la f caratter.dei primi) si dim.dal prodotto di Eulero, usando 2 volte solo lo sviluppo di Taylor del logaritmo !