Simmetria di Funzioni Aritmetiche

in quasi tutti gli Intervalli Corti

Giovanni Coppola

Universita' di Salerno

Diamo una breve panoramica di funzioni aritmetiche, per le quali abbiamo studiato (insieme al Prof. Iwaniec e al Prof. Salerno) il problema della "simmetria", attorno ad x, nell' intervallo "corto" $[x-h, x+h]$, per "quasi tutti" gli intervalli $[x-h, x+h]$, al variare di x in $[N, 2N]$.

(Qui "quasi tutti" = "ogni $x \in [N, 2N]$, tranne $o(N)$ possibili eccezioni"; "corto" = "$h = h(N)$, crescente, $h \to \infty$ e $h = o(N)$ quando $N \to \infty$")

Per ogni funzione aritmetica $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ definiamo (qui $\mathrm{sgn}(t) := t/|t|$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$) la "**somma di simmetria**" di f, nell' intervallo corto $[x-h, x+h]$:

$$S_f^{\pm}(x) := \sum_{|n-x|\le h} f(n)\mathrm{sgn}(n-x)$$

e la relativa media quadratica ($x \sim N$ abbrevia $N < x \le 2N$), il suo "**integrale di simmetria**"

$$I(N,h) := \sum_{x\sim N} \left| \sum_{|n-x|\le h} f(n)\mathrm{sgn}(n-x) \right|^2 .$$

Motivazioni

Kaczorowski e Perelli [8] : studio dell' integrale di Selberg tramite il termine principale di resto nella Formula Esplicita di Riemann-von Mangoldt. Tale termine e' (quasi) la "somma di simmetria" dei primi (meglio, di $\Lambda(n)$) negli intervalli corti.

Dimostrano l' equivalenza di stime non banali per l' integrale di simmetria dei primi (ovvero $I_\Lambda(N,h)$, Λ funz.di von Mangoldt) e stime non banali per l' int.di Selberg.

L' integrale di Selberg e'

$$J(N,h) := \int_N^{2N} \left| \sum_{x<n\le x+h} \Lambda(n) - h \right|^2 .$$

Come e' noto, la stima non banale $J(N,h) = o(Nh^2)$ da' il Teor.dei Numeri Primi in quasi tutti gli intervalli corti.

Inoltre, ogni maggiorazione non banale (con un guadagno netto risp.la stima banale $J(N,h) \ll Nh^2$) ha conseguenze notevoli sugli zeri della funzione zeta di Riemann.

L' integrale di simmetria dei primi non e' nell' ambito degli attuali metodi della Teoria Analitica dei Numeri.

Abbiamo studiato, quindi, funzioni aritmetiche "semplici":

1. funzione divisori, $d(n)$ (joint work con Saverio Salerno);
2. n liberi da quadrati (square-free): $\mu^2(n)$;
3. una media della funzione di von Mangoldt $\Lambda(n)$;
4. autovalori di Hecke $\lambda(n)$ (lavoro congiunto con Henryk Iwaniec);
5. somme di divisori primi, poco oltre $\sqrt{N}$, ovvero $\omega_B(n) := \sum_{p|n, B<p\le 2B} 1$, con $B \ll N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{190}-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

D' ora in poi abbreviamo $L := \log N$.

(Coppola-Salerno, Corollary 1 in [1])

Teorema 1. *Siano* $N, h \in \mathbf{N}$, $h = h(N) < \sqrt{N}/2$, *con* $h \to \infty$ *per* $N \to \infty$. *Allora:*

$$I_{d(n)}(N,h) = \frac{16}{\pi^2} N h \log^3 \frac{\sqrt{N}}{h} + \mathcal{O}\left(NhL^{5/2}\sqrt{\log L}\right).$$

Versione "asintotica" del Crivello Largo (isolando la diagonale). Problema dei "moduli grandi" ($\gg \sqrt{N}$) evitato passando ai divisori complementari ("flipping").

•) work in progress: miglioramento del termine di resto

(Coppola, Corollary 2 in [2])

Teorema 2. *Siano* $\varepsilon > 0$ *ed* $N, h \in \mathbf{N}$, $h = h(N) \le N^{1/6-\varepsilon}$, *con* $h \to \infty$ *per* $N \to \infty$. *Allora:*

$$I_{\mu^2}(N,h) \ll N\sqrt{h}.$$

Versione classica del Crivello Largo (maggiorazione).

Problema dei moduli "grandi" risolto usando la bassa densita' dei quadrati (termini "sporadici").

•) work in progress: miglior range di uniformita' di h

(Coppola, Theorem 1 in [3])

Teorema 3. *Sia* $A > 2$ *ed* $N, h \in \mathbf{N}$, $h = h(N) \le NL^{-A}$, *con* $h \to \infty$ *per* $N \to \infty$. *Allora:*

$$\sum_{x \sim N} \left| \sum_{j \le 2h} \sum_{|d - \frac{x}{j}| \le \frac{h}{j}} \Lambda(d) \mathrm{sgn}\left(m - \frac{x}{j}\right) \right|^2 \ll Nh^2 L^{-A},$$

a patto che $h \ge N^{1/3} L^B$, *dove* $B = B(A) > 0$ *e' esplicitabile (ad es.,* $B = A + 6$*).*

Usato il Crivello Largo "frammentato" (doppia dipendenza da x). Moduli grandi: nella convoluzione di Λ con la costante 1, $\Lambda * \mathbf{1} = \log$, si ottiene $f(n) = \log n$, che ha simmetria ottima !

(Coppola-Iwaniec, Corollary 4 in [4])

Teorema 4. *Siano* $N, h \in \mathbf{N}$, $h = h(N) \le N^{1/4}$, *con* $h \to \infty$ *per* $N \to \infty$. *Sia* $\lambda(n)$ *un autovalore di Hecke di una forma automorfa di peso* k, *livello* q *e carattere* χ_q, *considerata nei Teor.2 e 3 di [4]. Allora:* $I_\lambda(N,h) \ll_{k,q} NhL^3$.

Usata la formula asintotica, data da Conrey-Iwaniec [6], per

$$S(a) := \sum_{n \sim N} \lambda(n)\overline{\lambda(n+a)},$$

(+ "Dispersione"). Qui $I_\lambda(N,h) \sim \sum_a W(a)S(a)$, con:

$$W(a) := 2||a|-h| - |a|, \ \ \forall a \in [-2h, 2h].$$

(Coppola, Theorem 2 in [5])

Teorema 5. *Siano:* $\varepsilon > 0$; $N,\ h \in \mathbf{N}$; *qui* $h = h(N)$, *ed* $N^{\varepsilon} \le h \le N^{1-\varepsilon}$. *Per* $\omega_B(n) := \sum_{p|n, p\sim B} 1$ *assumiamo* $\sqrt{N} < B \le N^{1/2+1/190-\varepsilon}$. *Allora:* $I_{\omega_B}(N,h) \ll \dfrac{Nh^2}{N^{\varepsilon}}$.

Usata la "Dispersione": qui la funzione peso e' 0, tranne in:

$$W^{\pm}(a) := \begin{cases} -2a - 3h & \text{for } -3h/2 \le a < -h/2, \\ 4a & \text{for } -h/2 \le a \le h/2, \\ -2a + 3h & \text{for } h/2 < a \le 3h/2. \end{cases}$$

Quindi, stima di Duke-Friedlander-Iwaniec [6] per $I_{\omega_B}(N,h)$:

$$\sum_{a} W^{\pm}(a) \sum_{x\sim N} \left(\omega_B(x)\omega_B(x+a+h/2) - \omega_B(x)\omega_B(x+a)\right)$$

[1] Coppola G., Salerno S. - "On the symmetry of the divisor function in almost all short intervals" - prossima pubblicazione su Acta Arithmetica

[2] Coppola G. - "On the symmetry of the square-free numbers in almost all short intervals" - prossima pubblicazione

[3] Coppola G. - "On the symmetry of primes in almost all short intervals" - prossima pubblicazione su Ricerche di Matematica

[4] Coppola G., Iwaniec H. - "On the symmetry of Hecke eigenvalues in almost all short intervals" - prossima pubblicazione

[5] Coppola G. - "On the symmetry of prime-divisor functions in almost all short intervals" - prossima pubblicazione

[6] Duke W., Friedlander J., Iwaniec H. - "Bilinear forms with Kloosterman fractions" - Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 23–43

[7] Coppola G., Salerno S. - "On the symmetry of the divisor function in almost all short intervals" - prossima pubblicazione

[8] Kaczorowski J., Perelli A. - "On the distribution of primes in short intervals" - J. Math. Soc. Japan **45** (1993), no. 3, 447–458