(Qui N, h sono numeri naturali e $x \sim N$ sta per: $N < x \le 2N$; come al solito, diciamo

"quasi tutti"="$\forall x \in [N, 2N]$ tranne $o(N)$ eccez."

e $[x-h, x+h]$ "intervallo corto " significa che "$h = h(N) \uparrow$ e $h \to \infty, h = o(N)$ per $N \to \infty$")

Abbr.: Q.T.= quasi tutti e I.C. = intervallo corto, sgn$(r) \stackrel{def}{=} \frac{r}{|r|} \forall r \neq 0$, sgn$(0) \stackrel{def}{=} 0$ e

$$\|f\|_\infty \stackrel{def}{=} \max_{N-h<n\le 2N+h} |f(n)|$$

dove $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ è una funzione aritmetica (f.a.) <u>REALE</u>.

Indichiamo con $*$ il prodotto di Dirichlet di f.a. e $\mathbf{1}(n) = 1$, $\forall n$. (Segue g reale, $f = g * \mathbf{1}$.)

INTEGRALE DI SELBERG di f

$$J_f(N,h) \stackrel{def}{=} \sum_{x\sim N} \left| \sum_{|n-x|\le h} f(n) - M_f(x,h) \right|^2$$

dove $M_f(x,h)$ è il VALORE MEDIO (ATTESO) DI $\sum_n f(n)$.

Per esempio, Selberg introdusse

$$J(N,h) \stackrel{def}{=} \int_N^{2N} \left| \sum_{x<n\le x+h} \Lambda(n) - h \right|^2 dx$$

chiamato (in letteratura) l' INTEGRALE DI SELBERG (qua $\Lambda =$ VON MANGOLDT)

Facilmente $J(N,h) = o(Nh^2) \Rightarrow$ TNP in QUASI TUTTI I.C.:

$$\sum_{x<n\le x+h} \Lambda(n) \sim h \quad \text{Q.T. } x \sim N$$

Anzichè l' integrale, per RAGIONI TECNICHE, il nostro è DISCRETO (somma finita).

In un articolo (su J.Math.Soc.Japan **45**, 1993) Kaczorowski & Perelli introdussero l'integrale

$$I(N,T) \stackrel{def}{=} \int_N^{2N} |R(x,T)|^2 \, dx,$$

$R(x,T) =$ resto nella FORMULA ESPLICITA DI (RIEMANN-)VON MANGOLDT.

Provarono (ENUNCIATO TECNICO)

stima NON BANALE PER $I(N,T)$

$$\Downarrow$$

stima NON BANALE PER $J(N,h)$

Comunque, il loro integrale $I(N,T)$ si riduce (per la forma di $R(x,T)$) alla quantità (v. C-Laporta, Note Mat.Univ. Lecce **14**, 1994, per l' enunciato preciso)

$$\int_N^{2N} \left| \sum_{|n-x|\le x/T} \Lambda(n)\mathrm{sgn}(n-x) \right|^2 dx$$

che è l' INTEGRALE DI SIMMETRIA di Λ in $\left[x-\frac{x}{T}, x+\frac{x}{T}\right]$:

$$I_f(N,h) \stackrel{def}{=} \sum_{x\sim N} \left| \sum_{|n-x|\le h} f(n)\mathrm{sgn}(n-x) \right|^2$$

infatti, è l' INTEGRALE DI SIMMETRIA della funzione aritmetica $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.

(Meglio lavorare con la MEDIA QUADRATICA DISCRETA.)

Dal Teorema 1 [C-Salerno, C. R. Math. Rep. Acad.Sci.Canada **26**,2004] abbiamo (in ipotesi opportune), per $\varepsilon > 0$

$$f(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \le D}} g(d) \Rightarrow I_f \ll (N + D^2) h N^{\varepsilon} \|g\|_{\infty}^2$$

(anzi, abbiamo potenze di $\log N$, non N^{ε}) dalla disuguaglianza di Crivello Largo (abbrev.LS).

Dato che tutte le nostre f.a., f opp. g, sono $\mathcal{O}(N^{\varepsilon})$ ($\forall \varepsilon > 0$, fissato) ignoreremo N^{ε}:

$f = g * \mathbf{1}$ ha livello $\lambda \Rightarrow I_f(N, h) \ll (N + N^{2\lambda}) h$,

e livello λ significa: $\operatorname{supp} g \subset [1, D]$, $\frac{\log D}{\log N} < \lambda$;

chiamando $\theta \stackrel{def}{=} (\log h)/(\log N)$ la AMPIEZZA dell'I.C. $[x - h, x + h]$,

f di livello $\lambda \Rightarrow I_f$ NON-BANALE per $\lambda < \dfrac{1 + \theta}{2}$

Comunque, l'IPERBOLA di DIRICHLET dà (essendo $1-\theta = \frac{1+\theta}{2} \Rightarrow \theta = 1/3$)

$$g \text{ G.S.}, \ h \gg N^{\frac{1}{3}+\varepsilon} \Rightarrow I_{g*\mathbf{1}} \text{ NON BANALE}$$

dove G.S. = "BUONA SIMMETRIA", cioè: INTEGRALE DI SIMMETRIA NON BANALE IN TUTTE LE AMPIEZZE nel range $]0,\theta]$.

(Diremo anche "SIMMETRICA" anzichè G.S.)

Più precisamente (qui "AMPIEZZA $> 1/3$" è: $h \gg N^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ piccolo)

AMPIEZZA $> 1/3$: $\quad g$ G.S. $\Rightarrow I_{g*\mathbf{1}}(N,h) \ll \dfrac{Nh^2}{N^\varepsilon}$

quindi (INDUZIONE) il corollario:

Le funzioni “multidivisor” di Piltz

$$\tau_k(n) \overset{def}{=} \sum_{d_1\cdots d_k=n} 1, \quad \tau'_k(n) \overset{def}{=} \sum_{\substack{d_1\cdots d_k=n \\ d_1,\dots,d_k>1}} 1$$

hanno la proprietà:

AMPIEZZA $> 1/3$: $\forall k \in \mathbf{N} \quad I_{\tau_k}(N,h) \ll \frac{Nh^2}{N^\varepsilon}$

da cui

AMPIEZZA $> 1/3$: $\forall k \in \mathbf{N} \quad I_{\tau'_k}(N,h) \ll_k \frac{Nh^2}{N^\varepsilon}$

IDENTITÀ DI LINNIK $\Rightarrow$ integr.di simm.dei PRIMI NON-BANALE $\Rightarrow J(N,h) = o(Nh^2)$, nel CASO $h \gg N^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ (NOTO VIA ZERO-DENSITY).

(PROBLEMI tecnici per τ'_k : la constante in $\ll$, $c = c(k)$, e $\varepsilon = \varepsilon(k) \to 0$ quando $k \to \infty$)

Un po' di DETTAGLI sulle DIMOSTRAZIONI.

Vediamo come il FLIPPING dei DIVISORI dà:

g SIMMETRICA $\Rightarrow g * \mathbf{1}$ SIMMETRICA.

Introduciamo la SYMMETRY SUM (somma di simmetria) DI f (con $f = g * \mathbf{1}$)

$$S_f^{\pm}(x,h) \stackrel{def}{=} \sum_{|n-x|\le h} f(n)\mathrm{sgn}(n-x)$$

la cui media quadratica è I_f. "FLIPPIAMO" i DIVISORI:

$$S_{g*\mathbf{1}}^{\pm}(x,h) = \sum_{d\le D} g(d) \sum_{|m-\frac{x}{d}|\le \frac{h}{d}} \mathrm{sgn}(m-x/d) +$$

$$+ \sum_{m<\frac{x+h}{D}} \sum_{\substack{|d-\frac{x}{m}|\le \frac{h}{m} \\ d>D}} g(d)\mathrm{sgn}(d-x/m)$$

cioè

$$S^{\pm}_{g*\mathbf{1}}(x,h) = \sum_{d\le D} g(d)\chi_d(x) +$$

$$+ \sum_{m\le\frac{x-h}{D}} \sum_{|d-\frac{x}{m}|\le\frac{h}{m}} g(d)\mathrm{sgn}(d-x/m) +$$

$$+\mathcal{O}\left(\sum_{\frac{x-h}{D}\le m\le\frac{x+h}{D}} \|g\|_\infty \left(\frac{h}{m}+1\right)\right),$$

con, diciamo,

$$\chi_d(x) \stackrel{def}{=} \sum_{|m-\frac{x}{d}|\le\frac{h}{d}} \mathrm{sgn}(m-x/d) =$$

$$= \sum_{\substack{|n-x|\le h\\ n\equiv 0(\bmod d)}} \mathrm{sgn}(n-x)$$

e il RESTO è BUONO (almeno per un opportuno $D = D(N)$, in MEDIA QUADRATICA).

Quindi

$$I_{g*\mathbf{1}}(N,h) \ll \sum_{x\sim N}\left|\sum_{d\le D} g(d)\right|^2 +$$

$$+\sum_{x\sim N}\left|\sum_{m\le \frac{x}{D}}\ \sum_{\left|d-\frac{x}{m}\right|\le \frac{h}{m}} g(d)\mathrm{sgn}(d-x/m)\right|^2$$

Qui la seconda media quadr.è buona, SE LA SIMMETRIA DI g LO È : ($L \stackrel{def}{=} \log N$)

$$\sum_{x\sim N}\left|\sum_{m\le \frac{x}{D}}\ \sum_{\left|d-\frac{x}{m}\right|\le \frac{h}{m}} g(d)\mathrm{sgn}(d-x/m)\right|^2 \ll$$

$$\ll L^2 \max_{M\ll \frac{N}{D}} M \sum_{m\sim M}\ \sum_{x\sim N}\left|\sum_{\left|d-\frac{x}{m}\right|\le \frac{h}{m}} g(d)\mathrm{sgn}\Big(d-\frac{x}{m}\Big)\right|^2$$

dalla DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY (dopo una dissezione diadica) e dividendo in “PACCHETTI” è

"CIRCA" (cioè, ignorando i resti trascurabili)

$$\ll L^2 \max_{M \ll \frac{N}{D}} M \sum_{m \sim M} m \sum_{y \sim \frac{N}{m}} \left| \sum_{|d-y| \le \frac{h}{m}} g(d) \mathrm{sgn}(d-y) \right|^2$$

$$\ll L^2 \max_{M \ll \frac{N}{D}} M \sum_{m \sim M} m \frac{N}{m} \frac{h^2}{m^2} \left(\frac{N}{m} \right)^{-\varepsilon} \ll \frac{Nh^2 L^2}{D^\varepsilon},$$

avendo ASSUNTO

$$I_g(X,H) \ll \frac{XH^2}{X^\varepsilon} \ \ \forall X, H \to \infty \text{ e } H = o(X)$$

che è CIÒ CHE INTENDIAMO PER : g G.S. (= simmetrica). L'ipotesi è CONSISTENTE solo quando H non è limitato: DOBBIAMO (per H d'ampiezza positiva) SUPPORRE (qua θ è l'ampiezza di $[x-h, x+h]$ e $\delta > 0$)

$$\frac{N}{D} \text{ ha AMPIEZZA } < \theta, \text{ cioè } D \ll \frac{N}{h} N^\delta.$$

Perciò, richiediamo (UNA VOLTA ASSUNTA g SIMMETRICA)

$$(A) \qquad \sum_{x\sim N} \left| \sum_{d\le \frac{N}{h}N^{\delta}} g(d)\chi_d(x) \right|^2 \ll Nh^2N^{-\varepsilon}$$

(qua e prima tutti gli ε NON SONO nec.te GLI STESSI, ma sempre positivi)

L' ipotesi (A) è SODDISFATTA quando i livelli di $\frac{N}{h}N^{\delta}$ e del crivello largo s'incontrano, cioè se $1-\theta_0 = \frac{1+\theta_0}{2}$, infatti PER $\theta > \theta_0 = \frac{1}{3}$.

Ecco perchè, per AMPIEZZA$> 1/3$, otteniamo

$$g \text{ G.S.} \Rightarrow I_{g*\mathbf{1}} \text{ HA STIMA NON-BANALE}$$

(Da cui, PER INDUZIONE SU $g=\tau$, LA DIVISORI, v. C-Salerno su AA, TUTTE LE τ_k sono SIMMETRICHE)

Nel seguito, definiamo (ess.=essenzialmente, bd.=limitata)

$$g \text{ ESS. BD.} \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad g(n) \ll n^{\varepsilon}$$

La rel.(A) NON HA RAGIONE DI VALERE SOLO PER $h \gg N^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$, quindi:

CONGETTURA A. Sia $g : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ESS. BD. ed $N, h \in \mathbf{N}$, con $h = h(N) \to \infty$ ed $h = o(N)$ per $N \to \infty$. Quindi, assumiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che (A) vale.}$$

In altre parole, abbiamo G.S. PER FUNZIONI ARITMETICHE f (ess.bd.) DI LIVELLO $1-\theta$.

Come già osservato, questa CONGETTURA È UN TEOREMA PER AMPIEZZA $> 1/3$, GRAZIE AL LS.

Cong.A dà anche : μ G.S. (con id.tipo Linnik), da cui (usando ancora Cong.A) $\mu * s$ ha G.S., dove s è una f.a. "liscia" (per esempio, $s = \log$ opp. $s = \log^k$).